

Ćwiczenie 1

- a) tak, stopnia 7
 b) tak, stopnia 1
 c), d) nie
 e) tak, stopnia 3

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, $\text{st}(w) = 5$
 b) $w(x) = 2x^6 - \frac{3}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - x$, $\text{st}(w) = 6$
 c) $w(x) = 2x^8 + x^7 + 3x^4 - x^2 + 6x - 2$, $\text{st}(w) = 8$
 d) $w(x) = 2x^{10} - x^6 + 3x^2 - \frac{1}{2}x + 5$, $\text{st}(w) = 10$

Ćwiczenie 3

- a) $a_5 = -2$,
 $a_4 = a_3 = a_2 = 0$,
 $a_1 = 1$, $a_0 = 0$,
 $\text{st}(w) = 5$
 b) $a_6 = 1$, $a_5 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = 1$,
 $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$,
 $a_0 = 1$, $\text{st}(w) = 6$
 c) $a_0 = 2^{10}$, $\text{st}(w) = 0$

Ćwiczenie 4

- a) $w(x) = -3x^4 - 3x^2 - 3$
 b) $w(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Ćwiczenie 5

- a) $w(0) = -4$, $w(2) = 10$,
 $w(-2) = -26$
 b) $w(0) = 1$, $w(2) = 21$,
 $w(-2) = 13$
 c) $w(0) = -2$, $w(2) = 32$,
 $w(-2) = -44$
 d) $w(0) = 3$, $w(2) = -47$,
 $w(-2) = -75$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $v(x) = x^3 - 6x^2 + 4$;
 $a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 0$,
 $a_0 = 4$
 b) $w(x) = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{4}x^4 +$
 $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - 1$, $a_5 = -\frac{1}{6}$,
 $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = 0$,
 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_0 = -1$;
 $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 =$
 $= -\frac{3}{4}$
 2. a) $w(0) = -3$,
 $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$,
 $w(-2) = -19$,
 $w(-3) = -69$
 b) $w(0) = 2$, $w(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$,
 $w(-2) = 32$, $w(-3) = 80$
 c) $w(0) = -4$,
 $w(\frac{1}{2}) = -3\frac{3}{8}$,
 $w(-2) = -34$,
 $w(-3) = -76$
 d) $w(0) = -10$,
 $w(\frac{1}{2}) = -11\frac{7}{16}$,
 $w(-2) = -58$,
 $w(-3) = -214$
 3. $a = 1$, $b = -2$, $c = -8$,
 $d = 4$
 4. a) $u(-2) = -17 \neq 7$,
 $u(0) = 1$, $u(2) = -5$,
 Q i R
 b) $u(-1) = -8\frac{1}{2} \neq 8\frac{1}{2}$,
 $u(\frac{1}{2}) = 2$,
 $u(-\frac{1}{2}) = -2 \neq -1$, Q
 5. a) $w(1) = a + 1 + 1 = 3$,
 $a = 1$
 b) $w(3) = 81 - 9 + a = 0$,
 $a = -72$
 c) $w(-4) = -64 + 16a +$
 $+ 3 = 3$, $a = 4$
 d) $w(2) = 16a + 10 = -6$,
 $a = -1$

Ćwiczenie 6

- a) $w(-\frac{1}{2}) = 6$, $w(\frac{3}{2}) = -24$
 b) $w(-\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}$, $w(\frac{3}{2}) = 132\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 1

a) $u(x) + w(x) = 17x^4 + 6x^3 +$
 $- 3x^2 + 2x$, $\text{st}(u) = 4$,

$\text{st}(w) = 3$, $\text{st}(u + w) = 4$

b) $u(x) + w(x) = 6x^4 - 13x^3 +$
 $- 2x^2 + 5$, $\text{st}(u) = 7$,

$\text{st}(w) = 7$, $\text{st}(u + w) = 4$

Ćwiczenie 2

Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = x^4$, $u(x) = x^4 + 1$

b) $w(x) = x^4 + x^3$,

$u(x) = -x^4 + 1$

c) $w(x) = x^4 + x^2$,

$u(x) = -x^4 - x + 1$

d) $w(x) = x^4 + x + 1$,

$u(x) = -x^4 + 1$

e) $w(x) = x^4 + 1$,

$u(x) = -x^4 + 1$

6. a) $\begin{cases} 3 + a - b + 2 = 4 \\ -24 + 4a + 2b + 2 = 20 \end{cases}$
 $a = 6\frac{2}{3}$, $b = 7\frac{2}{3}$

7. $a_0 + 2a_0 + 4a_0 + 8a_0 + 16a_0 = 1$

$a_0 = \frac{1}{31}$

$w(x) = \frac{16}{31}x^4 + \frac{8}{31}x^3 + \frac{4}{31}x^2 + \frac{2}{31}x + \frac{1}{31}$

b) $\begin{cases} 81 - 27a + 9b + 2 = 11 \\ 1 + a + b + 2 = 7 \end{cases}$
 $a = 3$, $b = 1$

8. a) 0 b) 1

Ćwiczenie 3

Współczynniki wielomianu w są liczbami przeciwnymi do odpowiednich współczynników wielomianu u , tzn.:

$$w(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $f(x) + g(x) =$
 $= x^6 + x^3 + x^2 - 2x + 6$
 $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}x^6 - 4x^4 +$
 $- x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 2$
b) $f(x) + g(x) =$
 $= -3x^5 + x^2 - x + 2$
 $f(x) - g(x) =$
 $= -2x^6 + 3x^5 - 5x^2 + 9x + 2$
c) $f(x) + g(x) =$
 $= x^5 + 3x^4 + x - 3$
 $f(x) - g(x) =$
 $= 4x^7 - x^5 + 3x^4 + 7x - 7$

Ćwiczenie 4

a) $u(x) - w(x) = 5x^9 + 4x^8 +$
 $+ 10x^4 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \text{ st}(u) = 9,$
 $\text{st}(w) = 8, \text{st}(u - w) = 9$
b) $u(x) - w(x) = \frac{2}{5}x^4 +$
 $- \frac{1}{2}x^2 + 1, \text{st}(u) = 6,$
 $\text{st}(w) = 6, \text{st}(u - w) = 4$

2. a) $w(x) = 2x^5 + 6x^4,$
 $\text{st}(w) = 5, S_w = 8,$
 $u(x) = -\frac{1}{3}x^5 - x^4,$
 $\text{st}(u) = 5, S_u = -\frac{4}{3}$
b) $w(x) = 12x^2 - 18x,$
 $\text{st}(w) = 2, S_w = -6,$
 $u(x) = -2x^2 + 3x,$
 $\text{st}(u) = 2, S_u = 1$

3. a) $f(5) = 3, g(5) = 20$
b) $f(-3) = -16,$
 $g(-3) = 10$
c) $u(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{7},$
 $w(-\frac{1}{2}) = -\frac{31}{7}$

4. a) $\text{st}(p + q) = 5$
b) $\text{st}(p + q) \leq 5$ lub
 $p + q \equiv 0$
c) Jeśli $m \neq n$, to
 $\text{st}(p + q) = \max(m, n).$
Jeśli $m = n$, to
 $\text{st}(p + q) \leq n$ lub $p + q \equiv 0.$

5. a) $\text{st}(u + w) = 6$ dla $a \neq 0,$
 $\text{st}(u + w) = 4$ dla $a = 0$
b) $\text{st}(u + w) = 5$ dla
 $a \neq -6,$
 $\text{st}(u + w) = 1$ dla $a = -6$
c) $\text{st}(u + w) = 4$ dla
 $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},$
 $\text{st}(u + w) = 3$ dla $a = 1,$
 $\text{st}(u + w) = 1$ dla $a = -1$

Ćwiczenie 5

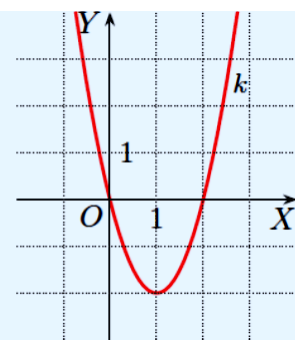
a) $h(x) = -10x^6 + 8x^4 + 7,$
 $h(-1) = 5$
b) $h(x) = -14x^4 - 15x^2 + 4,$
 $h(-1) = -25$

Ćwiczenie 6

a) $f(1) = 1, g(1) = -1,$
 $u(1) = 2f(1) + 4g(1) = -2;$
należy
b) $f(0) = 1, g(0) = -1,$
 $a = w(0) = 2f(0) - 3g(0) = 5$

6. a) $\text{st}(u+w) = 5$ dla $a \in \mathbf{R}$ i $b \neq 0$,
 $\text{st}(u+w) = 2$ dla $b = 0$ i $a = -7$,
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $b = 0$ i $a \neq -7$
 b) $\text{st}(u+w) = 7$ dla $a \neq -3$ i $b \in \mathbf{R}$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = -3$ i $b = 3$,
 $\text{st}(u+w) = 2$ dla $a = -3$ i $b \neq 3$
 c) $\text{st}(u+w) = 4$ dla $a \neq b$,
 $\text{st}(u+w) = 3$ dla $a = b \neq -4$,
 $\text{st}(u+w) = 1$ dla $a = b = -4$

7. a) Zauważmy, że wykresem funkcji h jest parabola $y(x) = -x^2$ przesunięta o wektor $[-1, 1]$, czyli $h(x) = -(x+1)^2 + 1 = -x^2 - 2x = -g(x) - 2f(x)$.
 Zatem $p = -2$, $q = -1$.
 b) $k(x) = 2(x-1)^2 - 2$



Ćwiczenie 2

a) $V(x) = x^3 - x$, $D = (1; \infty)$

b) $V(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$,
 $D = (-1; \infty)$

c) $V(x) = 2x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1$,
 $D = (\frac{1}{2}; \infty)$

d) $V(x) = x^4 + 6x^3 - 54x - 81$,
 $D = (3; \infty)$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $2x^5 - 6x^4 + 14x^3 + 4x^2$,
 $a_5 = 2$, $a_0 = 0$

b) $4x^3 + 5x^2 - 2x + 8$,
 $a_3 = 4$, $a_0 = 8$

c) $2x^6 - x^4 - x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x +$
 $-\frac{1}{2}$, $a_6 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{2}$

d) $-2x^6 - 3x^5 + 14x^3 +$
 $+12x^2 - 24$, $a_6 = -2$,
 $a_0 = -24$

e) $2x^5 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{1}{4}$,
 $a_5 = 2$, $a_0 = -\frac{1}{4}$

f) $-4x^6 - x^5 - 5\sqrt{2}x^4 +$
 $-\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 2x + 2\sqrt{2}$,
 $a_6 = -4$, $a_0 = 2\sqrt{2}$

Ćwiczenie 1

a) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

b) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 3$

d) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5$,
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$

2. a) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$,
 $a_0 = -1$

b) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = -2$,
 $a_0 = 3$

c) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = -4$,
 $a_0 = 1$

d) $\text{st}(w) = 3$, $a_3 = 1$,
 $a_0 = -6$

e) $\text{st}(w) = 4$, $a_4 = -6$,
 $a_0 = 2$

f) $\text{st}(w) = 5$, $a_5 = 12$,
 $a_0 = 6$

3. a) $v(x) = x^6 - 8x^5 + 16x^4 +$
 $+ 6x^3 - 24x^2 + 9$, $\text{st}(v) = 6$

b) $v(x) = 2x^4 + 2\sqrt{2}x^3 +$
 $- 7x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$, $\text{st}(v) = 4$

4. a) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 21x^4 +$
 $+ 2x^2$,

$g(x) = 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1$

b) $f(x) = -6x^7 + 2x^6 +$
 $+ 6x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 1$,
 $g(x) = x^8 - 2x^6 + 3x^4 +$
 $+ 6x^3 - 4x^2 + 2$

c) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 6x^3 +$
 $- x + 1$,
 $g(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 +$
 $- 4x^2 + 4x$

5. a) $P(x) = 10x^2 + 2x - 20, D = (2; \infty)$

b) $P(x) = 2x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 6x + 4, D = (-2; -1) \cup (1; \infty)$

6. a) $u(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 + 4x, m = 1, n = -11$

b) $u(x) = -4x^6 + 2x^5 - x^3 + 9x^2 - 4x + 4, m = 0, n = 9$

c) $u(x) = -2x^7 - 3x^5 + 2x^3, m = -3, n = -1$

7. a) $w(-2, 3) = 66$

b) $w(2, -4) = 60$

8. a) dla $P: w(x, y, z) = 1,$

dla $Q: w(x, y, z) = 3,$

czyli dla Q

b) dla $P: w(x, y, z) = 3,$

dla $Q: w(x, y, z) = -1,$

czyli dla P

c) dla $P: w(x, y, z) = 2,$

dla $Q: w(x, y, z) = \frac{1}{3},$

czyli dla P

9. a) $2x^3y + x^2y^2 - 3xy^3 +$
 $- 8x^2y - 12xy^2$

b) $-x^3y + x^3 + 2x^2y^2 +$
 $- x^2y + xy^3 - 2xy^2 - 2y^4$

c) $x^6 + x^5y + x^4y^2 +$
 $+ 2x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$

d) $2\sqrt{2}x^3 - 3\sqrt{3}y^3$

10. a) $-2x^2y + 4xy^2 - 2xz^2 +$
 $- 2y^2z + 4yz^2 + 4x^2z +$
 $- 7xyz$

b) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$

c) $36x^2y^2 - 16x^2z^2 - 9y^4 +$
 $+ 4y^2z^2$

d) $x^2 + x^2y + x^2yz + x +$
 $+ xy - xy^2z - xy^2z^2$

11. $P(x, y, z) = 2[(x + 1) \cdot (y + 1) + (x + 1)(z + 1) + (y + 1)(z + 1)] - 2(xy + xz + yz) =$
 $= 4x + 4y + 4z + 6,$

$x, y, z > 0$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x(3x + 1)$ b) $\frac{1}{3}x(x - \frac{1}{3})$

c) $9(x - \frac{5}{3})(x + \frac{5}{3})$

d) $16(x - \frac{9}{8})(x + \frac{9}{8})$

e) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

f) $2(x - \frac{3\sqrt{2}}{2})(x + \frac{3\sqrt{2}}{2})$

g) $-4(x - 3)(x + 3)$

h) $-64(x - \frac{1}{16})(x + \frac{1}{16})$

2. a) $(2x + 1)^2$ b) $(x - \frac{1}{6})^2$

c) $(3x - 2)^2$ d) $(\frac{3}{2}x + 1)^2$

e) $(x - \sqrt{2})^2$

f) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2$

3. a) $x_1 = 3, x_2 = 5,$

$y = (x - 3)(x - 5)$

b) $x_1 = 2, x_2 = 4,$

$y = (x - 2)(x - 4)$

c) $x_1 = -7, x_2 = -3,$

$y = (x + 7)(x + 3)$

d) $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 5,$

$y = 2(x + \frac{1}{2})(x - 5)$

e) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 1,$

$y = -3(x + \frac{2}{3})(x - 1)$

f) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{4},$

$y = 8(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{4})$

g) $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -1,$

$y = 2(x + \frac{3}{2})(x + 1)$

h) $x_1 = 1, x_2 = 5,$

$y = -(x - 1)(x - 5)$

i) $x_0 = 6, y = -\frac{1}{6}(x - 6)^2$

4. a) $y = (x - 7)(x + 1)$

b) $y = (x - 5)(x + 1)$

c), h) Nie mają postaci iloczynowej.

d) $y = 2(x - 3)(x + \frac{1}{2})$

e) $y = 3(x - \frac{1}{3})(x + 4)$

f) $y = \frac{1}{4}(x + 4)^2$

g) $y = (x - \frac{3-\sqrt{21}}{2}) \cdot$

$(x - \frac{3+\sqrt{21}}{2})$

i) $y = -4(x - 3)(x - \frac{1}{4})$

5. a) $b = -7, c = 10$

b) $b = 12, c = 27$

c) $b = -\frac{9}{2}, c = 2$

d) $b = \frac{1}{12}, c = -\frac{1}{12}$

e) $b = \sqrt{2}, c = -4$

6. Zauważmy, że dla $p, q > 0$: $\Delta = -4pq < 0$.

Zatem trójkątny nie można przedstawić w postaci iloczynowej.

Ćwiczenie 2

a) $w(x) = 3x^2(x^2 + 4)$,
 $x^2 + 4 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

b) $w(x) = \frac{1}{4}x^4(x^2 + 3)$,
 $x^2 + 3 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

c) $w(x) = -6x^3(x^2 + 7)$,
 $x^2 + 7 > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

d) $w(x) = -\sqrt{2}x^5(x^2 + \sqrt{3})$,
 $x^2 + \sqrt{3} > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$

e) $w(x) = x^9(7x^2 - 5x + 1)$,
 $\Delta = -3 < 0$

f) $w(x) = x^4(\frac{1}{4}x^2 + x + 2)$,
 $\Delta = -1 < 0$

g) $w(x) = -x^2(4x^2 - 3x + 7)$,
 $\Delta = -103 < 0$

h) $w(x) = x^3(3\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{6})$, $\Delta = 12 - 24\sqrt{3} < 0$

Ćwiczenie 1

a) $w(x) = x^3(x - 7)$

b) $w(x) = 6x^2(3x + 5)$

c) $w(x) = -2x^4(x + 4)$

d) $w(x) = -18x^2(3x - 2)$

e) $w(x) = 6x(x + 1)^2$

f) $w(x) = -3x^2(x - 2)^2$

g) $w(x) = -3x^4(3x - 1)^2$

h) $w(x) = \frac{1}{4}x(x^2 + 2)^2$

Ćwiczenie 3

a) $w(x) = x^2(x - 3)(x + 1)$

b) $w(x) = 2x^3(x + \frac{1}{2})(x - 1)$

c) $w(x) = -2x(x - \frac{3}{2})(x + 2)$

d) $w(x) = 20x^3(x + \frac{1}{2})(x + \frac{1}{5})$

e) $w(x) = x^2(x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$

f) $w(x) = x^3(x - \frac{2-\sqrt{2}}{2}) \cdot$

$\cdot (x - \frac{2+\sqrt{2}}{2})$

Ćwiczenie 1

a) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 + 2x^5 - x^4 - x^3,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

b) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^7 - x^5 - x^3 + x^2 + x - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 7$

c) $u(x) \cdot w(x) = x^3 - 1,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 3$

d) $u(x) \cdot w(x) =$
 $= x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5,$
 $\text{st}(u \cdot w) = 4$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $4x(x - \frac{1}{6})(x + \frac{1}{6})$
 b) $16x^3(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$
 c) $2x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

2. a) $x^3(x^2 - 2x + 5)$
 b) $x^2(x - 3)(x + 2)$
 c) $2x^4(x - 1)^2$
 d) $6x^2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$
 e) $6x(x - \frac{3}{2})(x - 1)$
 f) $\frac{3}{4}x^3(x + \frac{1}{3})(x - 2)$

3. a) $x^2(x - 2)(x - 3)$

b) $2x(x + \frac{1}{2})(x - 5)$

c) $-6x^3(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{2})$

d) $x^2(x^2 + 3x + 4)$

e) $x(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

f) $-\frac{1}{3}x^3(x - 9)(x + 1)$

g) $(x - 3)(x - 2)(x - 1) \cdot$
 $\cdot (x + 1)$

h) $(x - 4)(x + 1)^2(x + 4)$

i) $4(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(x - 3)^2$

j) $x^2(x - 3)(x - 1)(x + 2) \cdot$
 $\cdot (x + 5)$

k) $x^5(x - 2)(x + 3) \cdot$
 $\cdot (x^2 + 2x + 3)$

l) $x(x - 2)(x - 1) \cdot$
 $\cdot (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

4. a) $S(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

b) Dla $n = 4$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$P = S(4) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 = 30$$

$$L = P, \text{ zatem dla } n = 4$$

wzór jest prawdziwy.

Dla $n = 5$ mamy:

$$L = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$P = S(5) = \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 = 55$$

$$L = P, \text{ zatem dla } n = 5$$

wzór jest prawdziwy.

5. a) $S(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

b) $S(10) = \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 121 = 3025$

Wzory skróconego mnożenia – powtórzenie

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

c) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

e) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

f) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

g) $8x^3 + 6x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{8}$

h) $1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3$

2. a) $x^3 + 1$

b) $x^3 - 8$

c) $x^6 + 125$

d) $x^6 - 216$

3. a) $-x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x + 8$

b) $x^6 - x^5 - x^4 + x^2 + x - 1$

c) $x^6 + \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{4}$

d) $64x^6 + 16x^3 + 1$

4. a) $x^5 - 1$

b) $16x^4 - 1$

5. a) $w(x) = x^6 - 27, 54$

b) $w(x) = 64x^6 - 1, 1$

6. a) $5\sqrt{2} - 7$

b) $15\sqrt{3} + 26$

c) $15\sqrt{6} - 21\sqrt{3}$

7. a) $V(x) = (x+1)^4,$

$x > -1, V(3) = 256$

b) $V(x) = (x^2 - 9)^2,$

$x \in (-3; 3) \cup (3; \infty),$

$V(5) = 256$

Ćwiczenie 2

- a) $w(x) = 2x^2(x^3 + 1) = 2x^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$
 b) $w(x) = -x^3(x^3 + 8) = -x^3(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
 c) $w(x) = x(8x^3 - 1) = x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
 d) $w(x) = x^2(1 - 0,001x^3) = x^2(1 - 0,1x)(1 + 0,1x + 0,01x^2)$
 e) $w(x) = x^3(8x^3 - 27) = x^3(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$
 f) $w(x) = 2x(0,027x^3 + 1) = 2x(0,3x + 1)(0,09x^2 + 0,3x + 1)$

Ćwiczenie 3

- a) $u(x) = (x^2 + 1)(x + 5)$
 b) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$
 c) $u(x) = (x - 2)(x + 2)(4x + 1)$
 d) $u(x) = x(x^2 + 1)(x + 3)$
 e) $u(x) = (x - 5)(x + 5)(x + 4)$
 f) $u(x) = (x - 1)(x + 1)(\sqrt{5}x - 1)$
 g) $u(x) = (2x - 1) \cdot (4x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2)$
 h) $u(x) = (x^2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})$

Ćwiczenie 1

- a) $w(x) = 2x^2(x^2 + 3)^2$
 b) $w(x) = -2x(x^2 - 5)^2 = -2x(x - \sqrt{5})^2(x + \sqrt{5})^2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $-12x\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
 b) $x^2(x - 3)^2(x + 3)^2$
 c) $-x(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$
 d) $125x^5\left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{25}\right)$

2. a) $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
 b) $(2x - 1)(7x^2 + 2)$
 c) $(x - 3)(2x^2 + 5)$
 d) $(x - 3)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
 e) $\frac{1}{6}(3x - 1)(x - \sqrt{6}) \cdot (x + \sqrt{6})$
 f) $\frac{1}{3}(2x - 9)(x - 3)(x + 3)$
 g) $(x - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$
 h) $(x - 1)^2(x + 1)^3$

3. a) $20x^2\left(x - \frac{2}{5}\right)(x - 1) \cdot (x + 6)(x^2 + 2)$
 b) $-\frac{1}{4}x^2(x - 7)(x - 2) \cdot (x + 2)(x + 4)^2$
 c) $7x^2(x - 2)(x - 1)^2 \cdot (x + 2)(x + 3)(x^2 + x + 1)$
 d) $3x^2\left(x - \frac{1}{3}\right)^2(x - 1) \cdot (x + 1)(x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

4. a) $w(x) = x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$
 b) $w(x) = 4x^4 + 9 = (4x^4 + 12x^2 + 9) - 12x^2 = (2x^2 + 3)^2 - (2\sqrt{3}x)^2 = (2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3)(2x^2 + 2\sqrt{3}x + 3)$

Ćwiczenie 1

- a) $2x^3(3x+1)=0$,
 $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=0$
- b) $-x^3(x+2)(x-2)=0$,
 $x=-2$ lub $x=0$ lub $x=2$
- c) $x^4(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$,
 $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
 lub $x=\sqrt{2}$
- d) $-x^4(2x-3)=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{3}{2}$
- e) $x(x+6)^2=0$,
 $x=-6$ lub $x=0$
- f) $-x^2(2x-1)^2=0$,
 $x=0$ lub $x=\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2

- a) $x(x^2-7x+12)=0$, $\Delta=1$,
 $x=0$ lub $x=3$ lub $x=4$
- b) $-x^2(2x^2-9x-5)=0$,
 $\Delta=121$, $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=0$
 lub $x=5$
- c) $x(3x^2+4x+1)=0$, $\Delta=4$,
 $x=-1$ lub $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=0$
- d) $x^3(4x^2-3x+2)=0$,
 $\Delta=-23<0$, $x=0$
- e) $x(x^2+2x-4)=0$, $\Delta=20$,
 $x=-1-\sqrt{5}$ lub $x=0$
 lub $x=-1+\sqrt{5}$
- f) $x^4(2x^2-2x-1)=0$,
 $\Delta=12$, $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ lub $x=0$
 lub $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

Ćwiczenie 3

- $u(x)=\frac{1}{4}x(x^2-x-6)$,
 $x=-2$ lub $x=0$ lub $x=3$,
 wykres C;
- $v(x)=\frac{1}{12}x(x^2-x-12)$,
 $x=-3$ lub $x=0$ lub $x=4$,
 wykres B;
- $w(x)=\frac{1}{8}x(x^2+2x-8)$,
 $x=-4$ lub $x=0$ lub $x=2$,
 wykres A

Ćwiczenie 4

- a) $(x^2+2)(x-9)=0$, $x=9$
- b) $(x-2)(x+2)(2x+1)=0$,
 $x=-2$ lub $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=2$
- c) $x^2(x^2+1)(x+5)=0$,
 $x=-5$ lub $x=0$
- d) $x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(3x-5)=0$,
 $x=-\sqrt{2}$ lub $x=0$
 lub $x=\sqrt{2}$ lub $x=\frac{5}{3}$
- e) $(x-2)^2(x^2+2x+4)(x+2)=0$,
 $x=-2$ lub $x=2$
- f) $(x^2+\sqrt{2})(x-3\sqrt{2})=0$,
 $x=3\sqrt{2}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x=0$ lub $x=2$
 b) $x=-3$ lub $x=0$
 lub $x=3$
 c) $x=-27$ lub $x=0$
 d) $x=0$ lub $x=2$
 e) $x=-2$ lub $x=0$
 lub $x=2$
 f) $x=-\sqrt{5}$ lub $x=0$,
 $x=\sqrt{5}$

2. a) $x=-1$ lub $x=0$
 lub $x=1$
 b) $x=-2$ lub $x=-1$
 lub $x=0$
 c) $x=-1$ lub $x=0$
 lub $x=5$
 d) $x=-1$ lub $x=0$
 lub $x=3$
 e) $x=-2$ lub $x=0$
 lub $x=3$
 f) $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=0$
 lub $x=\frac{2}{5}$
 g) $x=-\frac{1}{3}$ lub $x=0$

- h) $x=-6$ lub $x=0$
 lub $x=2$
 i) $x=-4$ lub $x=-1$
 lub $x=0$
 j) $x=0$ lub $x=1$
 k) $x=-6$ lub $x=0$
 lub $x=3$
 l) $x=0$

3. a) $x=3$
 b) $x=-\sqrt{3}$ lub $x=\frac{1}{2}$
 lub $x=\sqrt{3}$
 c) $x=-9$ lub $x=1$
 d) $x=-1$ lub $x=1$
 e) $x=-1$ lub $x=2$
 f) $x=-4$ lub $x=1$
 g) $x=-\sqrt{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$ lub $x=\sqrt{2}$
 h) $x=-2$ lub $x=-\frac{3}{2}$ lub $x=2$
 i) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\frac{1}{2}$ lub $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. a) $x^3 - x - 4x - 4 = 0$
 $x(x^2 - 1) - 4(x + 1) = 0$
 $(x + 1)(x^2 - x - 4) = 0, x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$
lub $x = -1$ lub $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$

b) $x^3 - x - 2x + 2 = 0$
 $x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$
 $(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$
 $x = -2$ lub $x = 1$

c) $x(x^3 - x - 6x + 6) = 0$
 $x[x(x^2 - 1) - 6(x - 1)] = 0$
 $x(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$
 $x = -3$ lub $x = 0$ lub $x = 1$ lub $x = 2$

8. Przykładowa odpowiedź:

a) $w(x) = (x + \sqrt{2})^2 \cdot$
 $\cdot (x - \sqrt{2})^2 =$
 $= (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$

b) $w(x) =$
 $= (x - 1)^2 \cdot (x - 2)(x - 3) =$
 $= x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

5. $(-2, -7), (2, 1), (3, 3)$

6. a) $(-3, -10), (0, 2), (3, 14)$ 9. Przykładowa odpowiedź:

b) $(-\sqrt{2}, 1 - 3\sqrt{2}), (\frac{1}{4}, \frac{7}{4}),$
 $(\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2})$

c) $(-1, -7), (1, 1), (3, 9)$

7. a) $(0, -3), (2, -3)$

b) $(-3, \frac{15}{2}), (0, -3),$
 $(2, -\frac{5}{3})$

c) $(-2, -7), (2, -3)$

a) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$
 $\cdot (x - 3) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$

b) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$
 $\cdot (x - 3)(x^2 + 1) = -\frac{1}{6}x^4 +$
 $+\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$

c) $w(x) = -\frac{1}{6}(x + 2) \cdot$
 $\cdot (x - 3)(x^4 + 1) = -\frac{1}{6}x^6 +$
 $+\frac{1}{6}x^5 + x^4 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$

10. $V(x) = x^3 + 3x^2 - 4x,$
 $D = (1; \infty),$
 $V(x) = 12$ dla $x = 2$

11. $x(x - 3)(x + 5) = 30$ i $x > 3$
zatem $x = \sqrt{15}$
Suma długości krawędzi:
 $S(x) = 12x + 8, S(\sqrt{15}) =$
 $= 12\sqrt{15} + 8 < 12\sqrt{16} + 8 =$
 $= 56$

12. $x(x + 1)(4x - 3) = 0,75$ i $x > \frac{3}{4}$, zatem $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Długości krawędzi prostopadłościanu: $(2\sqrt{3} - 3)$ m, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m, $\frac{\sqrt{3}+2}{2}$ m,

czyli ściana o krawędziach $(2\sqrt{3} - 3), \frac{\sqrt{3}}{2}$ ma najmniejsze pole:

$P = \left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ m}^2$

Dzielenie wielomianów

Ćwiczenie 1

a) $x - 2$

b) $9x + 12$

c) $x^2 - 2x + 1$

d) $2x^3 + x^2 - x$

Ćwiczenie 2

a) $x - 3$, reszta 4

b) $2x + 2$, reszta 5

c) $x^2 + 3x - 5$, reszta 4

d) $x^3 + x^2 - 2x - 2$, reszta -2

Ćwiczenie 3

a) $w(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 2$

b) $w(x) = (-2x^2 + 9x - 27) \cdot$
 $\cdot (x + 3) + 85$

c) $w(x) = (x^3 + 2x^2 - x)(x - 1)$

d) $w(x) = (3x^3 - 6x^2 + 11x +$
 $- 13)(x + 2) + 25$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $w(x) = q(x)(2x + 3)$,
podzielny
b) $w(x) = q(x)(x^2 - 4x + 11) - 26$, niepodzielny
c) $w(x) = q(x)(-2x^3 + -6x^2 - 15x - 45) - 129$,
niepodzielny
d) $w(x) = q(x)(4x^2 - 4x + 16) - 57$, niepodzielny
e) $w(x) = q(x)(2x^2 + x + 4)$,
podzielny

2. a) $w(x) = (2x^2 + 9x + 37) \cdot (x - 4) + 147$
b) $w(x) = (x^2 - 3x + 12) \cdot (x + 3) - 29$
c) $w(x) = (3x^3 + 3x^2 + 2x + 2)(x - 1) + 2$
d) $w(x) = (x^2 + 2x - 1) \cdot (x + 6) + 2$
e) $w(x) = (2x^2 + 6x) \cdot (x + \frac{1}{2}) - 2$
f) $w(x) = (12x^2 + 4x) \cdot (x - \frac{1}{4}) + 3$

4. a) $-2x^2 - 3x + 3$, poprawnie
b) $-3x^2 - 2x$, reszta -6 ,
niepoprawnie
c) $3x^3 - 2x^2 + 2$, reszta 2 ,
niepoprawnie
d) $2x^3 - 4x + 2$, reszta -3 ,
niepoprawnie

3. a) $w(x) = (2x^2 + 3x + \frac{1}{2}) \cdot (2x + 1) - 9\frac{1}{2}$
b) $w(x) = (x^2 + 2x) \cdot (3x - 1) + 7$
c) $w(x) = (2x^2 - x) \cdot (3x + 4) - 1$
d) $w(x) = (2x^2 - 4x + 2) \cdot (\frac{1}{2}x + 3) - 4$

5. a) $w(x) = (-3x - 1)(x^2 - 4) - 9x - 8$
b) $w(x) = (2x^2 - 5x + 5)(x^2 + x) - 10x + 2$
c) $w(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 7$
d) $w(x) = (4x^2 + 4)(x^2 - 1) - 2x + 7$
e) $w(x) = (\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4})(2x^2 + 1) - 3x - \frac{7}{4}$

Równość wielomianów

Ćwiczenie 1

a) tak, $\begin{cases} 3a = 6 \\ 2a^2 = 8 \end{cases}$ czyli $a = 2$

b) nie, $\begin{cases} 3a = 3 \\ 2a^2 = 1 \end{cases}$ czyli
 $a = 1$ i $2a^2 = 1$ - sprzeczne

c) tak, $\begin{cases} 3a = -9 \\ 2a^2 = 18 \end{cases}$ czyli
 $a = -3$

Ćwiczenie 2

a) $x^4 - 2x^2 - 5x + 2 = x^4 + (2 - m)x^3 + (2 - 2m)x^2 + (-2m - 1)x + m$

$$\begin{cases} 2 - m = 0 \\ 2 - 2m = -2 \\ -2m - 1 = -5 \\ m = 2 \end{cases}$$

czyli $m = 2$

b) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = x^3 + (2 - m)x^2 + (-2m - 15)x + 15m$

$$\begin{cases} 2 - m = -2 \\ -2m - 15 = -23 \\ 15m = 60 \end{cases}$$

czyli $m = 4$

Ćwiczenie 3

a) $x^2 + 4x - 21 = x^2 + (7 - m)x - 7m$
dla $m = 3$

b) $x^2 + 3x - 10 = \frac{1}{2}mx^2 + (m^2 + \frac{1}{2}m - 2)x - 4m - 2$ dla $m = 2$

c) $2x^2 - 3x + 1 = mx^2 + (1 - 2m^2) \cdot x - 2m$
- nie ma takiego m

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x^3 - x^2 - x - 15 =$
 $= x^3 + (a-3)x^2 + (5-3a) \cdot$
 $\cdot x - 15$ dla $a = 2$

b) $x^3 + x^2 - 17x - 20 =$
 $= x^3 + (a+4)x^2 + (4a-5) \cdot$
 $\cdot x - 20$ dla $a = -3$

c) $2x^3 - 4x^2 - 7x + 18 =$
 $= 2x^3 + (a+4)x^2 + (2a+9) \cdot$
 $\cdot x + 18$ dla $a = -8$

2. a) $a = 2, b = 3$

b) $a = \frac{1}{2}, b = -5$

3. a) $-x^4 + 5x^3 - x^2 + 8x +$
 $-15 = -x^4 + (5+a)x^3 +$
 $+ (b-5a)x^2 + (3-5b)x - 15$
dla $a = 0, b = -1$

b) $2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3 =$
 $= 2x^4 + (a-2)x^3 + (b-a) \cdot$
 $\cdot x^2 + (3-b)x - 3$
dla $a = 1, b = 3$

c) $2x^4 - 3x^3 + 7x + 3 =$
 $= 2x^4 + (a+1)x^3 + (\frac{1}{2}a+b) \cdot$
 $\cdot x^2 + (\frac{1}{2}b+6)x + 3$
dla $a = -4, b = 2$

4. W podpunktach a) i b) zauważmy, że dla liczb całkowitych a i b szukany iloczyn ma postać: $w(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx - 1) = x^4 + x^3(a+b) + x^2ab + x(b-a) - 1$

a) $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \\ b-a=0 \end{cases}$ czyli $a=b=1$, zatem $w(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1)$

b) $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-6 \\ b-a=-5 \end{cases}$ czyli $a=3$ i $b=-2$, zatem $w(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x - 1)$

c) $w(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1)$ d) $w(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + 2x + 1)$

Twierdzenie Bezouta

Ćwiczenie 1

$w(x) = p(x)(x-a) + r,$
zatem

$w(a) = p(a)(a-a) + r =$
 $= p(a) \cdot 0 + r = r$

Ćwiczenie 2

a) $r = w(3) = 0$

b) $r = w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

c) $r = w(-1) = -1$

d) $r = w(-2) = 0$

Ćwiczenie 3

a) $w(1) = 0$, jest

b) $w(-1) = 0$, jest

c) $w(3) = -16 \neq 0$, nie jest

d) $w(-2) = 60 \neq 0$, nie jest

Ćwiczenie 4

a) $w(x) = (x+4)(x^2+x-2) = (x+4)(x+2)(x-1)$

b) $w(x) = (x-1)(x^2+3x+1) = (x-1)\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

c) $w(x) = (x+2)(x^2-3x-4) = (x+2)(x+1)(x-4)$

d) $w(x) = (x-3)(x^2-x-6) = (x+2)(x-3)^2$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $r = 0$ b) $r = 2$ c) $r = 0$

2. a) $w(x) = (x-1) \cdot (x+2)(x-7)$

b) $w(x) = 2(x+2)\left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot (x+1)$

c) $w(x) = (x+5) \cdot (x^2-3x+4),$
 $\Delta = -7 < 0$

3. a) $w(x) = (x-2) \cdot (x^2+x-3),$
 $2, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

b) $w(x) = (x+1) \cdot (2x^2+5x-3),$
 $-1, -3, \frac{1}{2}$

c) $w(x) = (x-1) \cdot (2x^2+x-4),$
 $1, \frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

d) $w(x) = -(x-2) \cdot (x^2 + \frac{3}{2}x - 1),$
 $2, -2, \frac{1}{2}$

4. a) $w(-3) = 21 - 3m = 0$
dla $m = 7$

b) $w(2) = 4m^2 - 20 = 0$
dla $m = -\sqrt{5}$ lub $m = \sqrt{5}$

c) $w(-1) = -m^2 + m + 6 = 0$ dla $m = -2$ lub $m = 3$

5. a) jest

b) $u(x) = (x - \frac{1}{2})(x+1),$
 $w(-1) = -15 \neq 0$, nie jest

c) jest

6. a) $w(x) = p(x)(x-3) \cdot (x+2) + ax + b,$

$w(3) = 7$ i $w(-2) = 3$, czyli
$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ -2a + b = -3 \end{cases}$$

zatem $r(x) = 2x + 1$

b) $x^2 - 3x + 2 = (x-2) \cdot (x-1),$

czyli $w(x) = p(x)(x-2) \cdot (x-1) + ax + b,$

$w(1) = -1$ i $w(2) = 3$, czyli
$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

zatem $r(x) = 4x - 5$

7. a) $w(x) = p(x)(x+1)(x-2) + ax + b,$

$w(-1) = 43$ i $w(2) = 73$, czyli $\begin{cases} -a + b = 43 \\ 2a + b = 73 \end{cases}$ zatem $r(x) = 10x + 53$

b) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, czyli $w(x) = p(x)(x-1)(x+1) + ax + b,$

$w(1) = 0$ i $w(-1) = -2$, stąd $\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases}$ zatem $r(x) = x - 1$

c) $r(x) = -7x^2 + 7$

Ćwiczenie 1

- a) dzielniki: $-1, 1, -3, 3$; pierwiastek całkowity: 1
 b) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$; pierwiastki całkowite: $-4, 1$
 c) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6$; pierwiastki całkowite: $-2, 1, 3$
 d) dzielniki: $-1, 1, -2, 2, -5, 5, -10, 10$; brak pierwiastków całkowitych

Ćwiczenie 2

a) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -2, 2, -4, 4,$$

$$w(-1) = -20 \neq 0, w(1) = 0,$$

$$w(-2) < 0, w(2) = -2 \neq 0,$$

$$w(-4) < 0, w(4) = 0,$$

$$x = 1 \text{ lub } x = 4$$

b) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -2, 2,$$

$$w(-1) = 7 \neq 0,$$

$$w(1) = 3 \neq 0, w(-2) = 0,$$

$$w(2) = 28 \neq 0,$$

$$w(x) = (x+2)(3x^2 - 3x + 1),$$

$$x = -2$$

c) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -3, 3,$$

$$w(-1) = -2 \neq 0, w(1) > 0,$$

$$w(-3) = 0, w(3) > 0,$$

$$w(x) = (x+3)(x^2 + 3x + 1),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \text{ lub }$$

$$x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

d) dzielniki wyrazu wolnego:

$$-1, 1, -3, 3,$$

$$w(-1) = 2 \neq 0, w(1) > 0,$$

$$w(-3) = 0, w(3) > 0,$$

$$w(x) = (x+3)(4x^2 + 4x + 1),$$

$$x = -3 \text{ lub } x = -\frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 3

a) $w(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x - 15) = (x-1)(x^2 + 5)(x-3), x = 1 \text{ lub } x = 3$

b) $w(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = (x-1)(x-3)(x+3)(x+2),$

$x = -3 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 3$

c) $w(x) = (x+1)(2x^3 - 10x^2 + x - 5) = (x+1)(2x^2 + 1)(x-5), x = -1 \text{ lub } x = 5$

d) $w(x) = (x-1)(x^3 - 7x + 6) = (x-1)(x^3 - x - 6x + 6) = (x-1)^2(x+3)(x-2),$

$x = -3 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = 2$

e) $w(x) = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x-1)(x-1)^3 = (x-1)^4, x = 1$

f) $w(x) = (x-2)(x+2)(x^2 + 3x - 1), x = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ lub } x = 2$

Ćwiczenie 4

- a) $-4, -2, 0, 2, 4$
b) $-4, 0, 4$
c) $-2, -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 2$

Ćwiczenie 5

- a) $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \frac{1}{2}$ lub $x = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$
lub $x = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$
d) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = -\frac{2}{3}$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $x = -5$ lub $x = 1$
b) $x = -2$ lub $x = -1$
lub $x = 3$
c) $x = -3$ lub $x = -1$
lub $x = -\frac{1}{2}$
d) $x = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ lub $x = 1$
lub $x = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$
e) $x = -4$
f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{3}$
lub $x = \frac{1}{2}$
g) $x = 3$
h) $x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
lub $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x = 3$

2. a) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 1$ lub $x = 3$
b) $x = 1$
c) $x = 1$ lub $x = 2$
d) $x = -1$ lub $x = -\frac{2}{3}$
lub $x = 1$
e) $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ lub $x = -2$
lub $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ lub $x = 3$
f) $x = -1$ lub $x = -\frac{1}{2}$

3. a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = -1 - \sqrt{2}$ lub $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = -1 + \sqrt{2}$

c) $x = \frac{2}{3}$

d) $x = -1 - \sqrt{6}$ lub $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$ lub $x = -1 + \sqrt{6}$

4. a) $x = 2$

b) $x = -3$ lub $x = 1$

c) $x = -\sqrt{2}$ lub $x = -1$
lub $x = \sqrt{2}$

d) $x = -\frac{1}{2}$ lub $x = 0$
lub $x = 3$

5. a) $P(t) = 2t(6 - t^2) =$
 $= -2t^3 + 12t$

$6 - t^2 > 0$ i $t > 0$,
zatem $t \in (0; \sqrt{6})$

b) $-2t^3 + 12t = 8$
dla $t = \sqrt{3} - 1$ lub $t = 2$

6. $(-3, 0), (3, 0), (3, \frac{13}{2}),$
 $(-3, \frac{13}{2})$

7. a) $C\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{4} + 1\right),$
 $P(x_0) = \frac{1}{2}x_0\left(\frac{x_0^2}{4} + 1\right) =$
 $= \frac{x_0^3}{8} + \frac{x_0}{2}, x_0 > 0$

b) $\frac{x_0^3}{8} + \frac{x_0}{2} = 10$ dla $x_0 = 4,$
zatem $B(4, 0)$ i $C(2, 5)$

8. Bez zmniejszania ogólności
możemy przyjąć:

$$C\left(x_0, \frac{x_0^2}{2} + 2\right)$$

$$P(x_0) = \frac{1}{2} \cdot 2x_0^2 \left(\frac{x_0^2}{2} + 2\right) =$$
$$= \frac{x_0^3}{2} + 2x_0 = 8 \text{ dla } x_0 = 2,$$

zatem $|AB| = 4, |BC| = 4$
oraz $|AC| = 4\sqrt{2}$.

Obwód trójkąta ABC :
 $8 + 4\sqrt{2}$

9. a) $V(x) = 8 \cdot 6 \cdot x - (8 - 2x)(6 - 2x)x = -4x^3 + 28x^2$ dla $x \in (0; 3)$

b) $x = 1$ dm

c) $-4x^3 + 28x^2 = 80$ dla $x = 2$ dm, czyli $P = 160$ dm²

Schemat Hornera

3. $(3x^4 - 10x^3 - 29x + 2) : (x - 4) = 3x^3 + 2x^2 + 8x + 3$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 10x^3 - 29x + 2 \\ \underline{3x^4 - 12x^3} \\ 2x^3 - 29x + 2 \\ \underline{2x^3 - 8x^2} \\ 8x^2 - 29x + 2 \\ \underline{8x^2 - 32x} \\ 3x + 2 \\ \underline{3x - 12} \\ 14 \end{array}$$

4. a) $6x^2 + 21x + 73$, reszta 228
b) $x^3 - 4x^2 - 2x + 3$, reszta -2
c) $2x^2 - 10$, reszta 11
d) $x^2 - 2x$, reszta -15
e) $8x^2 - 16x + 32$, reszta -37
f) $x^2 - 3x + 9$, reszta 0